SAGGIO DI GEOMETRIA NON-ARCHIMEDEA

DI

PILO PREDELLA (a Torino)

In questo lavoro viene costruita una nuova geometria non Archimedea, in un campo diverso da quello di Veronese e che meglio risponde, mi pare, alla *realtà* geometrica. Sarà dimostrata l'esistenza del segmento infinitamente piccolo assoluto nell'unico significato che si può dare a questa frase, e cioè tale segmento verrà definito e rappresentato geometricamente senza introdurre nuovi postulati o modificare gli antichi.

Nella prima parte stabilisco i principii fondamentali della Geometria proiettiva; nella seconda quelli della Geometria metrica.

I concetti intuitivi che mi hanno guidato sono esposti nel n. 54.

I. Nel piano.

1. Def. I punti e le rette del piano si diranno punti e rette *d*.

2. Def. Chiamo punto *i* ogni omografia parabolica non degenere di punti sopra una retta.

Chiamo retta *i* ogni omografia parabolica non degenere di rette di un fascio.

Data un'omografia degenere (punteggiata o fascio) con un unico elemento unito (singolare) l'omografia determina quell'elemento. Quindi:

3. Ogni omografia parabolica di punti (o di raggi) determina un punto *d* o *i* (una retta *d* o *i*) secondochè l'omografia è o non è degenere.

4. Dato un punto *i* cioè un' omografia parabolica di punti, se A_1 è il punto unito di *i* ed A_2 il corrispondente del punto all'infinito (considerato come appartenente alla seconda figura) l'omografia è determinata e si rappresenterà come il punto *i*, con $A_1\overline{A_2}$.

Data una retta *i*, cioè un'omografia parabolica di raggi, se a_1 è il raggio unito di *i* ed a_2 il corrispondente del raggio perpendicolare ad a_1 (oppure a_2 è il corrispondente della retta all' infinito nel caso che il centro del fascio sia un punto improprio) l' omografia è determinata e si rappresenterà, come la retta *i*, con $a_1\overline{a_2}$.

A_1 si dirà il nucleo e A_2 l'immagine del punto i. A_2 non può essere all' infinito e se coincide con A_1, l' omografia è degenere, vale a dire:

Il nucleo e l'immagine di un punto d coincidono.

5. Se A_1 è improprio l' omografia è determinata da una coppia P, P' di punti corrispondenti e si indicherà con (PP').

a_1 si dirà il nucleo e a_2 l' immagine della retta i. a_2 non può essere perpendicolare ad a_1; se coincide con a_1 l' omografia è degenere, vale a dire:

Il nucleo e l'immagine di una retta d coincidono.

Se a_1 è impropria l' omografia è determinata da una coppia pp' di rette corrispondenti e si indicherà con (pp').

6. Le omografie paraboliche di punti sulla retta all'infinito del piano si diranno punti impropri.

7. **Def.** Un punto i e una retta d si appartengono quando l'omografia i ha per sostegno la retta d e così una retta i e un punto d si appartengono quando l'omografia i ha per sostegno il punto d.

8. **Def.** Un punto i e una retta i si appartengono quando sia soddisfatta o l'una o l'altra delle seguenti condizioni:

1.° Il punto i è la sezione della retta i.

2.° Il nucleo del punto i è il sostegno della retta i e il nucleo della retta è il sostegno del punto.

Se A_1, ad es., giace in a_1 e a_2, e a_1 passa per A_1 e A_2, il punto $A_1\overline{A_2}$ appartiene alla retta $a_1\overline{a_2}$.

9. Se un punto ed una retta si appartengono, anche i loro nuclei si appartengono.

Se $A_1\overline{A_2}$ è un punto della retta $a_1\overline{a_2}$, A_1 è in a_1. Quando A_1 è l'intersezione di a_1 con a_2, il punto A_2 è pure sopra a_1. Resta a vedere dove cade A_2 quando A_1 non è l'intersezione di a_1 con a_2.

II. Distribuzione delle immagini dei punti di una retta.

10. **Teor. fondamentale.** *Tutti i punti collo stesso nucleo appartenenti ad una retta $a_1\overline{a_2}$ hanno le loro immagini sopra una parallela ad a_1.*

È data una retta $a_1\overline{a_2}$ cioè a dire due fasci proiettivi di raggi F ed F' col centro in $A = a_1 a_2$, con un solo raggio unito a_1, e colla coppia $a_2 a'_2$ di raggi corrispondenti, dove a'_2 è perpendicolare ad a_1.

Considero l'omologia nella quale a_1 è l'asse, un punto qualunque A_1 di a_1 diverso da A è il centro, ed $a_2 a'_2$ una coppia di rette corrispondenti.

In quest'omologia al fascio F corrisponde F' e una certa retta subito determinata r, parallela ad a_1 corrisponderà alla retta all'infinito.

La retta che unisce A_1 con un punto A_2 di r, sega F ed F' in un'omo-

grafia parabolica subordinata all'omologia; nella quale quindi al punto all'infinito corrisponde A_2. Dunque il punto $A_1\overline{A}_2$ giace nella retta $a_1\overline{a}_2$, e viceversa ogni punto della retta $a_1\overline{a}_2$, col nucleo A_1, ha la sua immagine sopra r.

11. Cor. *I punti di una retta $a_1\overline{a}_2$ collo stesso nucleo A_1 sono omografie subordinate in un'omologia che ha per asse a_1, per centro A_1 e la coppia $a_2a'_2$ di rette corrispondenti* (¹).

12. Problema. Dato il nucleo A_1 di un punto appartenente ad una retta $a_1\overline{a}_2$ trovare l'immagine, e data l'immagine trovare il nucleo.

Si conduca il segmento A_1P_2 perpendicolare ad a_1 e compreso fra a_1 e a_2, e da P_2 la parallela ad a_1. Le immagini richieste sono tutti e soli i punti di questa parallela.

Inversamente: Dato A_2 trovare A_1. Conduco da A_2 la parallela ad a_1 e dal punto P_2 d' intersezione con a_2 abbasso la perpendicolare P_2A_1 sopra a_1. A_1 è il punto richiesto.

13. Problema. Dato il nucleo a_1 di una retta passante per il punto $A_1\overline{A}_2$ trovare l'immagine, e data l'immagine trovare il nucleo.

Trovo il punto P_2 dove la perpendicolare ad a_1 condotta per A_1 sega la parallela ad a_1 condotta per A_2. Le immagini richieste sono tutte e sole le rette che passano per P_2.

Inversamente: Dato a_2 trovare a_1. Sia P_2 un punto comune ad a_2 e al cerchio di diametro A_1A_2. Se a_1 è la parallela ad A_2P_2 condotta per A_1, la retta $a_1\overline{a}_2$ passa per il punto A_1A_2. Il problema è di 2° grado.

14. Teor. *Due punti coi nuclei distinti appartengono ad una retta e a una sola.*	*Due rette coi nuclei distinti appartengono ad un punto e a uno solo.*

Se i due punti dati sono sopra una stessa retta d, questa è la sola che passa per i due punti (7); altrimenti bisogna in sostanza dimostrare che due omografie paraboliche di punti poste in rette diverse d, d', e aventi punti uniti distinti A_1, B_1, sono prospettive da uno stesso punto.

Messo il teorema sotto questa forma, quello di destra ne è una conseguenza per la legge di dualità (²).

Trovo i corrispondenti del punto comune a d e d' (considerato come punto della seconda figura) tanto in un'omografia come nell'altra; li unisco con una retta p e determino l'intersezione S di p con la retta A_1B_1.

(¹) Se A_1 tende all'intersezione di a_1 con a_2, r tende ad a_1: questo giustifica la definizione (8, 2ª).

(²) La legge di dualità sarà spesso invocata, ma riguarda soltanto gli elementi d; più tardi sarà dimostrata per gli elementi i.

Le due omografie date sono le sezioni di una stessa omografia di raggi col centro in S.

Se l'intersezione dd' si fosse considerata come appartenente alla prima figura (per una nota proprietà dei gruppi armonici) si sarebbe trovato lo stesso punto S. Dunque la retta che unisce i due punti dati è unica.

Si può anche procedere nel seguente modo:

Sieno $A_1\overline{A_2}$, $B_1\overline{B_2}$ i due punti dati; la retta che li unisce, se esiste, avrà per nucleo A_1B_1 (9) e la sua immagine dovrà passare per il punto d'intersezione della perpendicolare ad A_1B_1 condotta per A_1 colla parallela ad A_2B_1 condotta per A_2 (13). Analogamente la stessa immagine dovrà passare per il punto d'intersezione della perpendicolare ad A_1B_1 condotta per B_1 colla parallela ad A_1B_1 condotta per B_2, dunque ecc.

15. *Due punti coincidenti appartengono ad una doppia infinità di rette; due punti collo stesso nucleo appartengono ad una semplice infinità di rette.*

Due rette coincidenti appartengono ad una doppia infinità di punti; due rette collo stesso nucleo appartengono ad una semplice infinità di punti.

La prima parte è evidente; dimostro la seconda.

Siano $A_1\overline{A_2}$, $A_1\overline{B_2}$ i due punti.

Conduco per A_1 una parallela a_1 ad A_2B_2 e il segmento A_1P_2 perpendicolare ad A_1 e terminato sopra A_2B_2.

Le rette $a_1\overline{a_2}$ (dove a_2 passa per P_2) sono tutte le rette che passano pei due punti dati.

Siano $a_1\overline{a_2}$, $a_1\overline{b_2}$ le due rette.

Dal punto P_2 comune ad a_2 e b_2 conduco la perpendicolare P_2A_1 sopra a_1, e la parallela r ad a_1.

I punti $A_1\overline{A_2}$ (dove A_2 giace in r) sono tutti i punti comuni alle due rette.

III. Nello spazio.

16. Def. I punti, i piani, le rette dello spazio si diranno punti, piani, rette d.

I punti i dello spazio si definiscono come nei numeri 2, 3, 4, 5, 6.

17. Chiamo piano i ogni omografia parabolica non degenere di piani in un fascio.

18. Data in un fascio di piani un'omografia degenere con un unico piano unito (singolare) l'omografia determina quel piano, quindi:

Ogni omografia parabolica di piani in un fascio determina un piano d o i secondochè è o non è degenere.

19. Dato un piano i, cioè un'omografia parabolica di piani di un fascio, se α_1 è il piano unito, α_2 il corrispondente del piano perpendicolare ad α_1 (oppure α_2 è il corrispondente del piano all'infinito nel caso che l'asse del fascio sia una retta impropria) l'omografia è determinata e si rappresenterà, come il

piano i, con $\alpha_1\overline{\alpha_2}$; α_1 si dirà il nucleo e α_2 l'immagine del piano i; α_2 non può essere perpendicolare ad α_1 e se coincide con α_1 l'omografia è degenere.

20. Se α_1 è improprio l'omografia è determinata da una coppia $\pi\pi'$ di piani corrispondenti e si indicherà con $(\pi\pi')$.

21. Def. Un punto i e un piano d si appartengono quando l'omografia i ha per sostegno una retta del piano d; un piano i e un punto d si appartengono quando l'omografia i ha per sostegno una retta passante per il punto.

22. Def. Un punto i ed un piano i si appartengono quando sia soddisfatta o l'una o l'altra delle seguenti condizioni:

1.ª Il punto i è la sezione del piano i.

2.ª Il nucleo del punto i è il sostegno del piano i e il nucleo del piano è il sostegno del punto.

Esempio: Se A_1 giace in α_1 e α_2, e α_2 passa per A_1 e A_2, il punto $A_1\overline{A_2}$ appartiene al piano $\alpha_1\overline{\alpha_2}$.

23. Se un punto ed un piano si appartengono, i loro nuclei si appartengono.

Imitando il ragionamento del n. 10 di dimostra il 24, il 25, il 26.

24. Teor. fondamentale. *Tutti i punti collo stesso nucleo appartenenti ad un piano $\alpha_1\overline{\alpha_2}$ hanno le loro immagini sopra un piano parallelo ad α_1.*

Questo piano si trova colla costruzione seguente:

25. *Scelto un punto qualunque A_1 sopra α_1 e condotto il segmento A_1P_2 perpendicolare ad α_1 e terminato in α_2, il piano parallelo ad α_1 e passante per P_2, è il luogo delle immagini dei punti del piano dato aventi per nucleo A_1.*

26. *I punti collo stesso nucleo A_1 appartenenti ad un piano $\alpha_1\overline{\alpha_2}$ sono omografie subordinate ad un'omologia che ha per centro A_1 per piano fondamentale α_1 e nella quale α_2 e un piano perpendicolare ad α_1 sono piani corrispondenti.*

27. Teor. *Per un punto $A_1\overline{A_2}$ passa una totalità quattro volte infinita di piani, e correlativamente.*

Affinchè un piano $\alpha_1\overline{\alpha_2}$ passi per $A_1\overline{A_2}$ è necessario che α_1 passi per A_1. Conduco dunque per A_1 un piano ad arbitrio α_1 e tracciata per A_1 la perpendicolare ad α_1 trovo la sua intersezione P_2 col piano tirato per A_2 parallelamente ad α_1. Conduco per P_2 un piano ad arbitrio α_2. Il piano $\alpha_1\overline{\alpha_2}$ passa per $A_1\overline{A_2}$ (n.ⁱ 24, 25).

Per il teorema correlativo si vegga il n. 25.

28. *Per due punti coi nuclei distinti passa una totalità due volte infinita di piani.* | *Due piani coi nuclei distinti hanno in comune una totalità due volte infinita di punti.*

Se i punti dati sono sopra una stessa retta d, conduco per d, due piani α_1, α_2. Il piano $\alpha_1\overline{\alpha_2}$ passa per i punti dati (22, 2ª).

Ora rimane in sostanza a dimostrare che due omografie paraboliche di punti in rette distinte e coi punti uniti distinti sono prospettive in una duplice infinità di modi. Messo il teorema sotto questa forma, quello di destra ne è una conseguenza per la legge di dualità.

Noto inoltre che i nuclei dei punti dati si possono supporre punti propri perchè tali si potrebbero rendere, se non lo fossero, con una trasformazione omologica dello spazio.

Siano dunque $A_1\overline{A_2}$, $B_1\overline{B_2}$ i due punti. Conduco per A_1B_1 un piano qualunque α_1 e determinati i due punti P_2 e Q_2 (come è stato determinato P_2 nel n. 27) faccio passare per essi un piano qualunque α_2. Il piano $\alpha_1\overline{\alpha_2}$ passa per i due punti dati.

29. **Def.** *Chiamo retta la classe dei punti appartenenti a due piani coi nuclei distinti.*

Dirò che una retta e un piano si appartengono quando i punti della retta appartengono al piano.

30. a) *Due punti coi nuclei distinti appartengono ad una retta e ad una sola.* | *Due piani coi nuclei distinti appartengono ad una retta e ad una sola.*

Il teorema di destra è una conseguenza della def. 29; dimostro quello di sinistra.

Per i punti dati immagino due piani coi nuclei distinti. La retta comune ai due piani passa per i punti dati. La difficoltà consiste nel dimostrare che essa è unica.

Siano

$$A = A_1\overline{A_2} \qquad , \qquad B = B_1\overline{B_2}$$

i due punti; conduco per A_1B_1 un piano α_1 e determinati i punti P_2 e Q_2 (come nel n. 28) per essi tiro α_2. Il piano $\alpha_1\overline{\alpha_2}$ passa per A e B.

I nuclei dei punti della o delle rette AB sono sulla A_1B_1; preso dunque C_1 sopra A_1B_1 voglio trovare le immagini dei punti di AB che hanno per nucleo C_1.

Conduco il segmento C_1R_2 perpendicolare ad α_1, e terminato in α_2, e traccio per R_2 il piano ρ parallelo ad α_1. Tutti i punti di nucleo C_1 coll'immagine in ρ sono in $\alpha_1\overline{\alpha_2}$ (25).

Fra questi punti bisogna trovare quelli che sono indipendenti dalla scelta del piano $\alpha_1\overline{\alpha_2}$, cioè i punti che sono in tutti i piani passanti per A e B.

Esiste nel piano ρ una retta parallela ad A_1B_1 la quale non dipende dalla posizione di $\alpha_1\overline{\alpha_2}$ e contiene perciò le immagini dei punti di nucleo C_1 e giacenti su AB.

Infatti osservo che nella figura si hanno tre segmenti perpendicolari ad α_1 e terminati in α_2: A_1P_2, B_1Q_2, C_1R_2. I tre punti P_2, Q_2, R_2 sono perciò in

linea retta. Per essi passano tre piani paralleli ad α_1; i primi due passano rispettivamente per A_2 e B_2 e il terzo che è ρ incontrerà A_2B_2 in un punto C_2 il quale dividerà il segmento A_2B_2 in parti proporzionali a P_2R_2 e R_2Q_2 e quindi proporzionali ad A_1C_1 e C_1B_1.

La parallela r ad A_1B_1 condotta per C_2 giacerà in ρ e sarà il luogo delle immagini dei punti di nucleo C_1 che si trovano in tutti i piani passanti per A e B [1].

Dalla dimostrazione si ricava ancora:

31. I punti della retta AB aventi lo stesso nucleo C_1 hanno le loro immagini sopra la parallela ad A_1B_1 segante il segmento A_2B_2 in parti proporzionali ad A_1C_1 e C_1B_1. Al variare di C_1 questa parallela, che incontra sempre A_2B_2, descrive un piano.

L'intersezione di un piano d con un piano i è una retta come è stata definita nel n. 2.

32. b) *Tre punti, i cui nuclei non sono sopra una stessa retta, appartengono ad un piano e uno solo.*

Tre piani, i cui nuclei non passano per una stessa retta, appartengono ad un punto e uno solo.

Dopo l'osservazione del n. 28 basterà dimostrare il teorema di sinistra nell'ipotesi che i nuclei dei tre punti dati $A_1\overline{A_2}$, $B_1\overline{B_2}$, $C_1\overline{C_2}$, siano punti proprii.

Conduco il piano α_1 per A_1, B_1, C_1 e determinati i punti $P_2Q_2R_2$ (come nel n. 27 è stato determinato P_2) tiro per essi il piano α_2.

Il piano $\alpha_1\overline{\alpha_2}$ è il solo che passa per i punti dati.

33. c) *Una retta e un punto, coi nuclei che non si appartengono, appartengono ad un piano e uno solo.*

Una retta e un piano, coi nuclei che non si appartengono, appartengono ad un punto e uno solo.

34. d) *Due rette di un piano coi nuclei non coincidenti, appartengono ad un punto e uno solo.*

Due rette che passano per un punto, coi nuclei non coincidenti, appartengono ad un punto e uno solo.

Si dimostrano come nella geometria elementare.

Due rette si dicono parallele quando hanno in comune un punto improprio. Esse sono determinate da due omografie paraboliche di raggi segate dalla retta all'infinito in una stessa omografia. Due rette parallele hanno i nuclei paralleli e le immagini parallele.

---

[1] Abbassata da C_2 la perpendicolare C_1D_2 ad r, al variare di C_1, il punto D_2 descrive una retta che dirò immagine della retta AB, mentre A_1B_1 si dirà il nucleo. Risulterà (n. 51) che quest'immagine è il luogo delle immagini dei punti di AB che hanno dal loro nucleo la minima distanza.

Il nucleo e l'immagine di una retta a che non si trovi in un piano d sono rette sghembe. La retta a definisce un'omografia coassiale e le omografie subordinate sulle rette unite di tale omografia coassiale, sono i punti di a.

IV. Disposizione circolare naturale degli elementi di una forma di 1ª specie.

Sia a_1 il nucleo di una retta. I punti *d* della retta a_1 sono disposti in un ordine naturale circolare con due sensi [1]. Fissato un senso e presi due punti di a_1 o di una parallela ad a_1, uno di tali punti è precedente all'altro.

Ciò posto presi due punti $A_1\overline{A_2}$, $B_1\overline{B_2}$ della retta data, si dirà che $A_1\overline{A_2}$ è precedente a $B_1\overline{B_2}$ quando A_1 è precedente a B_1 oppure (nel caso che i nuclei coincidano e quindi A_2B_2 siano sopra una parallela ad a_1) quando A_2 è precedente a B_2.

Con questa definizione i punti *d* e *i* della retta data vengono a disporsi in un ordine circolare con due sensi.

Data una qualsiasi altra forma di prima specie, fascio di raggi o di piani, se un punto di una punteggiata sezione è precedente a un altro punto si dirà che l'elemento della forma che proietta il primo, è precedente all'elemento che proietta il secondo.

Ma esaminando due punteggiate sezioni del medesimo fascio di raggi o di piani si osserva che a punti ordinati dell'una corrispondono punti ordinati dell'altra, quindi l'ordine di disposizione degli elementi di un fascio non cambia col cambiare della punteggiata sezione, e si può concludere:

35. e) *Gli elementi di una forma di prima specie sono disposti in un ordine naturale circolare con due sensi, e in due forme proiettive ad elementi ordinati di una forma corrispondono elementi ordinati dell'altra.*

36. Ora si possono estendere le operazioni di proiezione e sezione; occorre però che il sostegno della forma data e il sostegno della forma ottenuta col proiettare o segare, abbiano nuclei che non si appartengono.

Due forme si diranno proiettive quando si ottengono l'una dall'altra con un numero finito di operazioni.

Basta ricordare come si uniscono due punti e come si conduce il piano per una retta e un punto etc., per concludere:

37. *Se due forme sono proiettive i nuclei degli elementi di una forma sono proiettivi ai nuclei degli elementi corrispondenti dell'altra.*

Il teorema che due forme composte di tre elementi con nuclei distinti sono proiettive, il teorema di Desargues sui triangoli omologici e quindi la definizione e costruzione delle forme armoniche, l'esistenza di un unico elemento che costituisce con tre elementi un gruppo armonico, il teorema che due forme armoniche sono proiettive e che se due forme sono proiettive ad un

---

[1] Enriques, *Lezioni di Geometria Proiettiva*, III ed., pag. 18 e seg.

gruppo armonico dell'una corrisponde un gruppo armonico dell'altra, si dimostrano colle stesse parole come nell'ordinaria Geometria.

Per terminare la dimostrazione dei principii della Geometria proiettiva non resta che ad estendere il teorema di Staudt:

Due punteggiate proiettive che hanno tre punti uniti coi nuclei distinti, coincidono.

Ma qui si presenta un caso singolare: *Date due forme in corrispondenza biunivoca e tali che ad un gruppo armonico dell'una corrisponda un gruppo armonico dell'altra, le due forme non sono in generale proiettive.*

Per la dimostrazione del teorema di Staudt occorre dunque seguire un'altra via.

V. Birapporto e bidifferenza.

38. **Def.** Se A, B, C, D sono quattro punti di una retta,

$$\rho = \frac{A_1C_1}{B_1C_1} : \frac{A_1D_1}{B_1D_1}$$

e

$$\delta = \left(\frac{A_2C_2}{A_1C_1} - \frac{B_2C_2}{B_1C_1}\right) - \left(\frac{A_2D_2}{A_1D_1} - \frac{B_2D_2}{B_1D_1}\right)$$

si diranno rispettivamente il birapporto e la bidifferenza dei punti ABCD, quando $A_1B_1C_1D_1$ siano i nuclei e $A_2B_2C_2D_2$ le proiezioni ortogonali delle immagini di essi punti sul nucleo della retta.

δ è formato in modo analogo a ρ: le divisioni sono però sostituite da sottrazioni e i segmenti $A_2C_2 \ldots$ sono rapportati rispettivamente ad $A_1C_1 \ldots$.

Def. Se il nucleo di D è un punto improprio $D = (PP')$ (n. 5) il birapporto e la bidifferenza dei quattro punti sono i limiti a cui tendono ρ e δ quando $D_1\overline{D_2}$ tende a (PP').

Allora D_1 tende all' infinito e ρ diventa $\frac{A_1C_1}{B_1C_1}$. Per trovare ciò che diventa δ, osservo che l'omografia parabolica $D_1\overline{D_2}$ è rappresentata dalla relazione:

$$xy + (d_2 - 2d_1)x - d_2y + d_1^2 = 0$$

dove x, y, d_1, d_2, sono le ascisse di due punti corrispondenti, del punto unito e del punto D_2 corrispondente del punto $y = \infty$. Al punto $x = 0$ corrisponde un punto $y = k$ tale che $d_2k = d_1^2$:

$$\frac{A_2D_2}{A_1D_1} = \frac{d_2 - a_2}{d_1 - a_1} = \frac{1}{k}\,\frac{d_1^2 - ka_2}{d_1 - a_1} = \frac{1}{k}\left[d_1 + a_1 + \frac{a_1^2 - ka_2}{d_1 - a_1}\right],$$

e quindi

$$\frac{A_2D_2}{A_1D_1} - \frac{B_2D_2}{B_1D_1} = \frac{1}{k}\left[a_1 - b_1 + \frac{a_1^2 - ka_2}{d_1 - a_1} - \frac{b_1^2 - ka_2}{d_1 - b_1}\right].$$

Se d_1 cresce indefinitamente e k diventa e rimane poi sempre $= PP'$ il 2° membro diventa $\frac{a_1 - b_1}{k} = \frac{A_1B_1}{P'P}$. Dunque:

39. Se $D = (PP')$, la bidifferenza dei quattro punti ABCD è

$$\left(\frac{A_2C_2}{A_1C_1} - \frac{B_2C_2}{B_1C_1}\right) - \frac{A_1B_1}{P'P}.$$

40. Cor. *Esiste un punto e uno solo che forma dopo tre punti di una retta una bidifferenza e un birapporto dati.*

Questo punto si può facilmente determinare quando ρ e δ siano rapporti di segmenti dati.

41. *Date due punteggiate proiettive il birapporto e la bidifferenza di quattro punti dell'una sono eguali al birapporto e alla bidifferenza dei quattro punti corrispondenti.*

Dim. Presi quattro punti sopra una retta $a = a_1\overline{a_2}$ e proiettati da un centro S sopra un altra retta b, basterà (37) dimostrare che la bidifferenza dei primi è eguale alla bidifferenza delle loro proiezioni.

Suppongo dapprima che b sia il nucleo di a, indico con α l'angolo a_1a_2, con M il punto comune ad a_1a_2 e con SL la perpendicolare calata da S sopra a_1.

Prendo un punto qualunque A_1 sopra a_1, conduco il segmento A_1P_2 perpendicolare ad a_1 e terminato in a_2 e da P_2 conduco un segmento P_2Q_2 parallelo ad a_1. E così ottengo un punto qualunque $A_1\overline{Q_2}$ di $a_1\overline{a_2}$. Indico con A'_2 la proiezione ortogonale di Q_2 sopra a_1, e da Q_2 conduco Q_2A_2 parallelo ad SA_1 e terminato in a_1. Sarà $A_1\overline{A_2}$ la proiezione di $A_1\overline{Q_2}$ sopra a_1 fatta dal centro S. Infatti $A_1\overline{A_2}$ appartiene tanto alla retta che da S proietta $A_1\overline{Q_2}$, come alla retta a_1

$$A_1A'_2 = A_1A_2 + A_2A'_2$$

e analogamente

$$C_1C'_2 = C_1C_2 + C_2C'_2.$$

Aggiungo A_1C_1 ad ambo i membri della 2ª eguaglianza e tolgo i risultati dalla 1ª:

$$A'_2C'_2 = A_2C_2 + C_2C'_2 - A_2A'_2,$$

da cui

$$\frac{A'_2C'_2}{A_1C_1}=\frac{A_2C_2}{A_1C_1}+\frac{C_2C'_2-A_2A'_2}{A_1C_1}.$$

Ora

$$A_1P_2=MA_1\,\mathrm{tg}\alpha \qquad \text{e} \qquad A_2A'_2:A_1P_2=LA_1:SL,$$

onde

$$A_2A'_2=\frac{MA_1\cdot LA_1}{SL}\,\mathrm{tg}\alpha\,;$$

e analogamente

$$C_2C'_2=\frac{MC_1\cdot LC_1}{SL}\,\mathrm{tg}\alpha\,;$$

e, poichè

$$MC_1\cdot LC_1=(MA_1+A_1C_1)(LA_1+A_1C_1)=A_1C_1(MA_1+LC_1)+MA_1\cdot LA_1,$$

si avrà:

$$\frac{A'_2C'_2}{A_1C_1}=\frac{A_2C_2}{A_1C_1}+\frac{MA_1+MC_1}{SL}\,\mathrm{tg}\alpha.$$

Nello stesso modo scrivo

$$\frac{B'_2C'_2}{B_1C_1},\ \frac{A'_2D'_2}{A_1D_1},\ \frac{B'_2D'_2}{B_1D_1},$$

indi compongo la bidifferenza di $A'B'C'D'$ e trovo che essa è eguale alla bidifferenza delle loro proiezioni.

Ora suppongo che *a* e *b* siano due rette *d*. Indico con M il loro punto comune e con R e Q i punti limiti.

Prendo sopra *a* un punto qualunque $A_1\bar{A}_2$. Trovo l'intersezione A'_1 di SA_1 con *b*. Da A'_1 tiro un segmento A'_1P_2 parallelo ad *a* e terminato sulla SA_2 e da P_2 tiro un segmento $P_2A'_2$ parallelo ad SA_1 e terminato in *b*.

Il punto $A'_1\overline{A'_2}$ è la proiezione fatta da S sopra *b* del punto $A_1\overline{A_2}$. Infatti A'_1P_2 appartiene alla retta che unisce S con $A_1\overline{A_2}$, e $A'_1\overline{A'_2}$ appartiene a questa retta e a *b*:

$$A'_1A'_2:A'_1P_2=QM:A_1R\,,\ A'_1P_2:A_1A_2=SA'_1:SA_1=MR:A_1R\,,$$

da cui

$$A'_1A'_2=A_1A_2\frac{MR\cdot QM}{A_1R^2},$$

ma

$$QA'_1 = \frac{MR \cdot QM}{A_1R}\ ,\ QC'_1 = \frac{MR \cdot QM}{C_1R}$$

onde, sottraendo,

$$A'_1C'_1 = A_1C_1 \frac{MR \cdot QM}{A_1R \cdot C_1R}\ ,$$

e quindi

$$\frac{A'_1A'_2}{A'_1C'_1} = \frac{A_1A_2}{A_1C_1} \cdot \frac{C_1R}{A_1R}$$

ovvero

$$\frac{A'_1A'_2}{A'_1C'_1} = \frac{A_1A_2}{A_1C_1} - \frac{A_1A_2}{A_1R}\ .$$

Analogamente

$$\frac{C'_1C'_2}{A'_1C'_1} = \frac{C_1C_2}{A_1C_1} + \frac{C_1C_2}{C_1R}\ .$$

Ora siccome

$$A'_2C'_2 = A'_1C'_1 + C'_1C'_2 - A'_1A'_2\ ,$$

dividendo ambo i membri per $A'_1C'_1$ e valendosi delle precedenti relazioni, si trova:

$$\frac{A'_2C'_2}{A'_1C'_1} = \frac{A_2C_2}{A_1C_1} + \frac{A_1A_2}{A_1R} + \frac{C_1C_2}{C_1R}\ .$$

Allo stesso modo scrivo gli altri rapporti, compongo la bidifferenza dei punti $A'B'C'D'$ e trovo che è eguale alla bidifferenza di ABCD.

Per passare da una punteggiata sopra $a_1\overline{a_2}$ ad altra punteggiata prospettiva sopra $b_1\overline{b_2}$ posso passare dalla prima ad una punteggiata sopra a_1 da questa a un'altra sopra b_1 e finalmente da questa alla data sopra $b_1\overline{b_2}$. In questi passaggi la bidifferenza di quattro punti è sempre eguale a quella dei corrispondenti dunque il teorema è dimostrato perchè gli altri casi che si possono presentare si trattano come i precedenti.

42. Viceversa: *Date due punteggiate in corrispondenza biunivoca se il birapporto e la bidifferenza di quattro punti qualsivogliano dell' una è eguale al birapporto e alla bidifferenza dei corrisp., le due punteggiate sono proiettive* (40).

43. f) Cor. *La corrispondenza fra due forme di prima specie è determinata date tre coppie di elementi corripondenti.*

44. Se ABCD è armonico lo è anche BACD e poichè i due gruppi sono proiettivi si ricava:

Il birapporto e la bidifferenza di quattro punti formanti un gruppo armonico è rispettivamente -1 e zero.

Ciò posto si estendono immediatamente la definizione di conica, la polarità e via via e quindi la legge di dualità.

VI. Una notevole proprietà delle coniche.

Definita dunque la conica $C^{(2)}$ come luogo delle intersezioni dei raggi corrispondenti in due fasci proiettivi, $C^{(2)}$ è determinata da cinque punti coi nuclei distinti; per essa valgono i teoremi di Pascal e di Brianchon.

I nuclei dei punti di $C^{(2)}$ formano una conica ordinaria (37), per trovare le immagini vale il seguente teorema:

45. *Le immagini di tutti i punti di $C^{(2)}$, aventi lo stesso nucleo A_1, sono sopra una parallela alla retta tangente in A_1 alla conica dei nuclei* (Confr. n. 10).

Siano ABCDE cinque punti della conica $C^{(2)}$: $A = A_1\overline{A_2}$... Conduco per $E = E_1\overline{E_2}$ una retta avente per nucleo E_1A_1, indico con $F = A_1\overline{F_2}$ la sua ulteriore intersezione colla conica e considero l'esagono ABCDEF.

Sia $H_1\overline{H_2}$ il punto dove la retta di Pascal è tagliata dal lato CD. La retta AF deve passare per $H_1\overline{H_2}$. Quindi ovunque sia il punto $H_1\overline{H_2}$, (non ci è bisogno di costruirlo) siccome i due punti $A = A_1\overline{A_2}$ e $F = A_1\overline{F_2}$ si trovano sopra AF, sarà A_2F_2 parallela al nucleo di AF (10), ma per il teorema di Pascal (applicato alla conica dei nuclei di $C^{(2)}$) il nucleo di AF è la tangente alla conica dei nuclei, dunque il teorema è dimostrato.

46. Dati due fasci proiettivi di raggi se i centri dei fasci e tre coppie di raggi corrispondenti sono elementi *d*, il loro prodotto si dirà una conica *d*.

Una conica *d* ha un contenuto maggiore di una conica ordinaria perchè oltre i punti di questa possiede anche i punti d'intersezione dei raggi *i* corrispondenti. Dal teorema 45 si ricava

47. Cor. *Una conica d tangente ad una retta nel punto A_1 passa per il gruppo di tutti i punti della retta che hanno per nucleo A_1.*

VII. Eguaglianza di segmenti.

48. Mi propongo di trovare una conveniente definizione dell' eguaglianza dei segmenti.

Considero dapprima un segmento limitato da un punto *d* e da un punto *i*: cioè dai punti O e $A = A_1\overline{A_2}$. Suppongo che il triangolo OA_1A_2 roti nel suo piano intorno ad O e indico con $C^{(2)}$ la conica passante per cinque posizioni di $A_1\overline{A_2}$. Essa passerà per tutte le altre, ma non è questo che ci interessa. Il nucleo di $C^{(2)}$ è il cerchio di centro O passante per A_1, quindi

tutti i punti di $C^{(2)}$ aventi il nucleo A_1, avranno le immagini (45) sopra la perpendicolare p_2 condotta per A_2 ad OA_1. Sopra p_2 prendo un punto M_2. Se vogliamo che $C^{(2)}$ sia un cerchio di centro O è necessario che la definizione di eguaglianza dei segmenti sia data in modo che tutti i segmenti i quali hanno un estremo in O e l'altro su $C^{(2)}$ siano eguali tra loro e quindi che il segmento $O - A_1\overline{A_2}$ sia eguale ad $O - A_1\overline{M_2}$. Ciò giustifica la seguente definizione:

Due segmenti $O - A_1\overline{A_2}$, $O - M_1\overline{A_2}$ si diranno eguali se le proiezioni di A_1A_2 e A_1M_2 sopra OA_1 coincidono.

Considero ora un segmento limitato da due punti *i*: $A = A_1\overline{A_2}$ e $B = B_1\overline{B_2}$. Preso un punto qualunque O, indico con $C = C_1\overline{C_2}$ il punto dove la parallela ad AO condotta per B taglia la parallela ad AB condotta per O. Se si vuole che i lati opposti di un parallelogrammo siano eguali bisogna dare una tale definizione dell'eguaglianza dei segmenti che da essa risulti il segmento AB = OC. Ed allora dall'osservazione della figura si ricava che la definizione deve essere la seguente:

49. Def. *Dato un segmento qualunque AB indico con A_1B_1 i nuclei e con A_2B_2 le proiezioni ortogonali delle immagini di A e B sopra la retta A_1B_1 e attribuisco ad A_2A_1 e B_1B_2 il segno + o — secondochè essi sono nella stessa direzione di A_1B_1 o nell'opposta.* Fatte le stesse convenzioni intorno ad un altro segmento CD,

dirò che i due segmenti AB e CD sono eguali quando $A_1B_1 = C_1D_1$ e le due somme $A_2A_1 + B_1B_2$ e $C_2C_1 + D_1D_2$ sono eguali e collo stesso segno.

Se poi A_1 e B_1 coincidono e coincidono pure C_1 e D_1,

dirò che AB = CD quando la distanza delle immagini di A e B è eguale alla distanza delle immagini di C e D.

50. Cor. *Esiste un segmento ed uno solo il quale sia sopra un raggio, abbia un estremo nell'origine del raggio e sia eguale ad un segmento dato.*

51. Def. *Se C, D, ... M sono punti di un segmento AB e ACD ... MB sono punti ordinati, si dirà che il segmento AB è composto dei segmenti AC, CD, ... MB.*

Si dice che un segmento è la somma di più segmenti dati quando sia composto di segmenti eguali ai dati.

Se il segmento a è $= b + c$, si dice che a è maggiore di b o che b è minore di a.

52. Cor. *Una somma di quanti si vogliano segmenti eguali ad $A_1 - A_1\overline{A_2}$ è minore del segmento A_1B_1 (dove A_1 e B_1 sono punti distinti).*

53. Cor. *I segmenti costituiscono una specie non Archimedea di grandezze.*

VIII. Considerazioni generali.

54. Ritorno alle definizioni 1 e 2, che a prima vista possono parere arbitrarie, per spiegare le ragioni intuitive che le giustificano.

La trattazione logica dell'argomento prosegue nel n. 55.

Per intendere il perchè un'omografia parabolica si comporti come un punto, suppongo che essa sia il limite di un'omografia iperbolica i cui punti uniti tendano a coincidere.

Dati i punti uniti U e V di un'omografia O, e il corrispondente R del punto all'infinito, l'omografia è determinata. Quando V tende ad U (ed R poniamo rimane fermo) O finisce col diventare un'omografia parabolica O′, determinata da U ed R; U si comporta dunque come due punti, e O′ si può considerare come un'omografia iperbolica avente due punti uniti infinitamente vicini: U ed *i*.

Indico con ρ l'invariante assoluto di O:

$$\rho = (\mathrm{UVR}\infty) = \frac{\mathrm{UR}}{\mathrm{VR}},$$

da cui

$$\frac{\mathrm{UR}}{\mathrm{UV}} = \frac{\rho}{\rho - 1}.$$

Tutte le omografie paraboliche col punto unito U determinano lo stesso punto infinitamente vicino ad U o punti diversi?

In tutte le omografie proiettive ad O, il rapporto $\frac{\mathrm{UR}}{\mathrm{UV}}$ ha sempre lo stesso valore e quindi in ciascuna di esse, UR determina la grandezza e la direzione di UV e se l'omografia cambia (mantenendosi sempre proiettiva ad O) e UR cresce o diminuisce, UV cresce o diminuisce.

Osservo che tutte le omografie paraboliche sono proiettive, onde (come nelle omografie iperboliche proiettive il rapporto $\frac{\mathrm{UR}}{\mathrm{UV}}$ è costante) *dobbiamo ritenere*, confrontando UR con U*i*, che in tutte le omografie paraboliche, se UR non cambia di grandezza, non cambi nemmeno U*i*, e se UR cresce o diminuisce, cresca o diminuisca anche U*i*, e che la posizione di *i* rispetto ad U sia interamente determinata da UR, e che UR sia, per dir così, l'immagine ingrandita di U*i* con un coefficiente d'ingrandimento infinito ma costante come, in tutte le omografie iperboliche proiettive fra loro, è costante il rapporto fra UR e UV. R è il punto *i* staccato da U e portato nel campo visibile.

Dunque un'omografia parabolica $\overline{\mathrm{UR}}$ determina un punto *i* e cambiando R, cioè l'omografia, cambia anche questo punto. Il segmento infinitamente piccolo U*i* non è una quantità che *diviene*, ma una quantità fissa nella sua figurazione geometrica di omografia parabolica.

Riscontrata un'intuitiva corrispondenza univoca fra le omografie paraboliche e i punti *i*, mi sono servito di quelle per definire i punti *i*, anzi ho iden-

tificato i due concetti colle definizioni 1 e 2, per quanto nella nostra mente continuino a rimanere distinti.

Il gruppo di punti infinitamente vicini ad U e appartenenti ad una retta d formano un segmento s infinitamente piccolo senza estremi e la retta d si può considerare come composta di segmenti s.

Si potrebbero introdurre anche gli estremi del segmento s considerandoli come rappresentati da $\overline{U\infty}$. Di più, dato il punto $i = \overline{AR}$ si può immaginare che R descriva tutta la retta passando pel punto all' infinito e ritornando nella posizione primitiva. Allora il punto i si allontana dal punto U e passa nel segmento s successivo a quello in cui si trovava. Analogamente si potrebbe considerare il punto $\overline{UR_n}$, dove R_n è la posizione finale di un punto che ha descritto n volte la retta; $\overline{UR_n}$ si trova nell' n-esimo segmento s dopo quello in cui giace U. Ho però abbandonato lo studio di tali punti perchè non sono riuscito a rappresentare le rette passanti per essi.

In una retta $a = \overline{a_1 a_2}$ i punti collo stesso nucleo A_1 hanno le loro immagini sopra una parallela ad a_1 (10). Questi punti formano un segmento s senza estremi e parallelo ad a_1, il quale ha da a_1 una distanza la cui immagine ingrandita è il segmento A_1P_2, segmento perpendicolare ad a_1 e terminato in a_2.

La retta a si può considerare formata da segmenti s paralleli ad a_1 e disposti come gradini di una scala. Il primo gradino si trova sopra a_1 ed ha per centro l'intersezione di a_1 con a_2 gli altri vanno innalzandosi sopra a_1 da una parte ed abbassandosi sotto a_1 dall'altra, e le loro distanze da a_1 vanno man mano crescendo per quanto rimangano sempre infinitesime. Ad ogni punto della retta a_1 corrisponde un gradino, luogo dei punti i che hanno quel punto per nucleo. I centri dei gradini sono i punti di a_2, l'inclinazione della scala è data dall'angolo $a_2 a_1$.

Ora si comprende bene come per due punti infinitamente vicini non passi una retta sola: essi determinano un gradino e quindi a_1, ma non l' inclinazione della scala, perchè non resta determinata l'intersezione di a_1 con a_2.

Quando i detti gradini sono proiettati sopra a_1 si ha una retta d.

Così si delinea nella nostra mente la figura della retta non Archimedea. Considerazioni analoghe si possono fare intorno alla retta dello spazio, in questo caso a_2 e a_1 sono rette sghembe, (veggasi nota pag. 287).

Nel campo di Veronese, ricostruito analiticamente da Levi-Civita e Hilbert, studiato proiettivamente da Schönflies, il fatto che due punti infinitamente vicini non determinano interamente una retta, non si presenta.

Lo scopo di Hilbert fu di dimostrare l' indipendenza del postulato di Archimede, di modo che egli più che ispirarsi alla *realtà geometrica* doveva ubbidire alla necessità che nel suo campo tutti i postulati fossero validi all'infuori dell'Archimedeo; e fra l'altro che due punti determinassero sempre una retta.

Ma il teorema 10 svela in parte ciò che avviene negli intorni infinitamente piccoli dei punti, che sfuggono alla nostra esperienza diretta.

Se in alcuni casi eccezionali avviene che due punti non determinano una retta e che due rette d' un piano non determinano un punto, questo non è un inconveniente e, nonostante porti qualche complicazione, conferisce a dare maggior ricchezza di risultati.

Come l' introduzione dello zero nell' Aritmetica non infirma i teoremi riguardanti i numeri maggiori di zero (sebbene alcuni soffrano qualche eccezione quando lo zero interviene) così l' introduzione dei punti, delle rette, dei piani *i* non altera la Geometria degli elementi *d*, della quale questa Geometria non Archimedea è una continuazione, uno sviluppo ulteriore.

È da notare che non abbiamo avuto bisogno di assumere nuovi postulati o di estendere quelli della Geometria ordinaria riflettenti gli elementi *d*. Anche il postulato della continuità (sia nella forma di Dedekind o di Weierstrass o di Cantor) che ha dato luogo a varie pubblicazioni interessanti di Stolz e Veronese, non ha per noi bisogno di modificazioni, perchè esso viene assunto soltanto rispetto agli elementi *d* (1).

Sul teorema 47 osservo che condotta la tangente *a* in un punto A_1 di una conica *d*, tutti i punti di *a* infinitamente vicini ad A_1 formano un segmento *s* senza estremi giacente sulla conica; cosicchè ogni conica *d* si può considerare come composta di segmenti *s*. Resta dunque legittimata l'antica concezione secondo la quale una curva si può considerare come una linea poligonale con infiniti lati infinitesimi.

Che i punti *i* di *a* infinitamente vicini ad A_1 giacciano sulla conica non fa meraviglia se si pensa che il raggio di curvatura della conica essendo finito, è infinitamente grande rispetto alle distanze che i detti punti *i* hanno da A_1, dimodochè i punti della conica infinitamente vicini ad A_1, sono in linea retta per la stessa ragione che un cerchio di raggio infinito è una retta.

Per ultimo noto che i punti infinitamente vicini ad A_1 e giacenti sulle rette che passano per A_1 formano una sfera senza superficie avente il centro in A_1. Questa è la ragione per la quale A_1 fu denominato il nucleo di tutti quei punti.

IX. Eguaglianza di angoli.

55. Conduco per O due raggi $\overline{a_1 a_2}$, $\overline{b_1 b_2}$ nella stessa direzione di due raggi (semirette) dati *a* e *b*. Indico con α e β gli angoli acuti $a_2 a_1$ e $b_1 b_2$ ed attri-

(1) Applicato agli elementi *i* il postulato di Dedekind, o di Weierstrass non sussiste più, il che dimostra che esso non definisce, come si ritiene, la continuità, in quanto che è assurdo che una forma continua coll' introduzione di nuovi elementi cessi di essere continua.

buisco ad essi il segno più o meno secondochè sono nello stesso verso o nel verso opposto dell'angolo a_1b_1. Con centro O e raggio r descrivo un cerchio, e nei punti A_1B_1 dove il cerchio taglia a_1 e b_1 conduco due segmenti tangenti A_1A_2, B_1B_2 terminati in a_2 e b_2.

L'arco di cerchio compreso fra i due raggi $\overline{a_1a_2}$ e $\overline{b_1b_2}$ è composto dell'arco A_1B_1 e di due segmenti infinitesimi $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$ (47).

Dati due altri raggi c e d e ripetute le precedenti convenzioni e costruzioni con un cerchio pure di raggio r, se si vuole che angoli al centro eguali comprendano archi eguali siamo condotti a dare la seguente definizione:

56. Def. Si dirà che l'angolo ab è eguale all'angolo cd quando l'angolo $a_1b_1 = c_1d_1$ e le due somme $\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta$ e $\mathrm{tg}\gamma + \mathrm{tg}\delta$ siano eguali e collo stesso segno.

57. Cor. Esiste un angolo ed uno solo avente per lato un raggio dato, giacente da una parte assegnata di questo raggio ed eguale ad un angolo dato.

58. Def. Se $c, d, \ldots m$ sono raggi di un angolo ab e $a, c, d, \ldots m, b$ sono raggi ordinati, si dirà che l'angolo ab è composto degli angoli ac, cd, $\ldots mb$.

Def. Si dice che un angolo è la somma di più angoli dati quando sia composto di angoli eguali ai dati.

Se l'angolo $\alpha = \beta + \gamma$, si dice che $\alpha > \beta$ o che $\beta < \alpha$.

59. Cor. Gli angoli costituiscono una specie non Archimedea di grandezze.

Ometto gli altri principii fondamentali della Geometria i quali sono più presto dimostrati che enunciati. Fa eccezione il seguente:

60. Teor. Se due triangoli hanno due lati eguali e l'angolo compreso eguale, anche i terzi lati sono eguali.

Se due triangoli hanno due lati eguali e l'angolo compreso diseguale, all'angolo maggiore si oppone lato maggiore.

Dim. Siano due raggi $\overline{a_1a_2}$, $\overline{b_1b_2}$ uscenti da O; indico con α e β gli angoli a_2a_1, b_1b_2 col loro segno (55). Indico con A_1P_2 un segmento perpendicolare ad a_1 e compreso fra a_1 e a_2 e con P_2A_2 un segmento parallelo ad a_1. Il punto $A = \overline{A_1A_2}$ giace sul raggio $\overline{a_1a_2}$. Egualmente condotto B_1Q_2 perpendicolare a b_1 compreso fra b_1 e b_2, e Q_2B_2 parallelo a b_1, vengo a determinare sul raggio $\overline{b_1b_2}$ un punto $B = \overline{B_1B_2}$.

La proiezione A'_2A_1 di A_2A_1 sopra A_1B_1 è eguale alla somma delle proiezioni $A'_2P'_2$ e P'_2A_1 di A_2P_2 e P_2A_1. Indico con h la perpendicolare abbassata da O sopra A_1B_1

$$P'_2A_1 : h = P_2A_1 : OA_1 = \mathrm{tg}\alpha$$

quindi $P'_2A_1 = h\,\mathrm{tg}\alpha$, e analogamente $B_1Q'_2 = h\,\mathrm{tg}\beta$, onde

$$A'_2A_1 + B_1B'_2 = A'_2P'_2 + Q'_2B'_2 + h(\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta).$$

Dato ora un altro angolo O' eguale a quello considerato e portato sopra i suoi lati due segmenti $O'C$ e $O'D$ eguali ad OA e OB, il segmento che unisce gli estremi di questi lati è eguale ad AB, perchè il triangolo $O'C_1D_1 \equiv OA_1B_1$ e le somme $A'_2P'_2 + Q'_2B'_2$ e $\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta$ rimangono le stesse.

Se invece l'angolo O' è minore di O, o il segmento $C_1D_1 < A_1B_1$ e quindi $CD < AB$, oppure la somma $\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta$ relativa ad O' è minore di quella relativa ad O (56, 58). Siccome poi $A'_2P'_2$ e $Q'_2B'_2$ rimangono gli stessi, perchè $O'C = OA$ e $O'D = OB$ (49) si conclude che $CD < AB$.

Nello stesso modo si considerano anche gli altri casi. Il teorema è valido anche se l'angolo O è infinitesimo.

Coll' introduzione dei punti i le ordinarie omografie paraboliche diventano tutte iperboliche. Ma si possono considerare omografie le quali (anche tenuto conto degli elementi i) abbiano un solo punto unito. Esse definiscono altri nuovi punti i_2, che dànno luogo a segmenti infinitamente piccoli del 2° ordine. Così proseguendo si potrebbero studiare segmenti infinitamente piccoli di un ordine qualunque.

Le teorie esposte sono suscettibili di un largo sviluppo quando si applichino alle quadriche, alla polarità rispetto alle coniche e alle quadriche, alle omografie ecc., che coll' introduzione dei punti i vengono ad arricchirsi di proprietà nuove, come dimostra il teorema 47.

La costruzione di un sistema numerico rappresentativo degli elementi d ed i sarà oggetto d'un mio prossimo lavoro.

SAGGIO DI GEOMETRIA NON-ARCHIMEDEA

NOTA II

DI

PILO PREDELLA (a Torino)

In questa seconda Nota [1], che fa seguito a quella pubblicata collo stesso titolo nel vol. XLIX (1911) di questo *Giornale*, introduco dei numeri appropriati a rappresentare la *Geometria non-Archimedea* svolta nella prima Nota e stabilisco i principii fondamentali della corrispondente Geometria analitica.

Ometto i teoremi che si dimostrano come nella Geometria ordinaria [2], perchè il mio scopo è di sgombrare il terreno dalle difficoltà che si possono incontrare in una trattazione completa di una *Matematica non-Archimedea* fondata sui concetti esposti in queste due Note.

Continuo la numerazione dei Capitoli e dei paragrafi al punto in cui è stata lasciata nella prima Nota.

X. Numeri non-Archimedei.

61. Siano A e B gli estremi di un segmento. Indico con A_1, B_1 i nuclei, con A_2, B_2 le proiezioni ortogonali delle immagini di A e B sopra la retta A_1B_1, attribuisco ai segmenti A_2A_1, B_1B_2 il segno $+$ o $-$ secondochè sono nella direzione di A_1B_1 o nell'opposta, indico con a_1 il numero positivo che

---

[1] Dopo la pubblicazione della prima Nota, feci pubblicare in pochi esemplari nell'ottobre 1911 questa continuazione, in un opuscolo separato, coi tipi di V. Bona di Torino.

[2] Altri teoremi vengono tralasciati perchè non mi occorrono, come p. es.:

La somma degli angoli di un triangolo (infinitesimo o no) è eguale a due retti.

Le immagini delle rette che dividono in n parti eguali l'angolo formato da due raggi a_1, $\overline{a_1 a_2}$, dividono in n parti eguali un segmento perpendicolare ad a_1 e compreso fra a_1 e a_2 (56).

misura A_1B_1, con a_2 il numero positivo o negativo che misura $A_2A_1 + B_1B_2$ e rappresento con $a_1 + a_2\eta$ il segmento AB.

Se A_1 e B_1 coincidono, le rette che uniscono i due punti hanno un nucleo parallelo alla retta che unisce le immagini di A e B, quindi la distanza fra le immagini di A e B è eguale alla distanza fra le loro proiezioni sopra il detto nucleo. Se a_2 è il valore di tale distanza, rappresenterò il segmento AB con $a_2\eta$.

62. Per un punto O conduco due semirette $a = a_1\overline{a_2}$, $b = b_1\overline{b_2}$. Con centro O e raggio unitario descrivo un cerchio e nei punti A_1, B_1 dove il cerchio taglia a_1 e b_1 conduco due segmenti tangenti A_1A_2, B_1B_2 terminati in a_2 e b_2.

L'arco di cerchio compreso fra le due semirette a e b è composto dell'arco A_1B_1 e di due segmenti infinitesimi $A_1\overline{A_2}$ e $B_1\overline{B_2}$ (47).

Indico con α e β gli angoli acuti a_2a_1 e b_1b_2 e attribuisco ad essi il segno $+$ o $-$ secondochè sono nello stesso verso di a_1b_1 o nel verso opposto.

Diremo che l'arco compreso fra le due semirette a e b e l'angolo ab sono rappresentati da $a_1 + (\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta)\eta$, dove a_1 è il valore di A_1B_1.

Cor. Se $a_1 + a_2\eta$ e $b_1 + b_2\eta$ rappresentano segmenti eguali o angoli eguali, si ha che $a_1 = b_1$ e $a_2 = b_2$, e viceversa (49, 56).

63. Def. Data una retta $a = a_1\overline{a_2}$, scelgo sopra di essa un segmento $OU(O = O_1\overline{O_2}$, $U = U_1\overline{U_2})$ eguale all'unità di misura. Se M è un punto qualunque al finito della retta, e $a_1 + a_2\eta$ rappresenta il segmento OM, si dirà ascissa del punto M l'espressione $a_1 + a_2\eta$ o $-a_1 + (-a_2)\eta$ secondochè OM è nella direzione di OU o nell'opposta.

64. Def. $a_1 + a_2\eta$, dove a_1 e a_2 sono numeri reali, si dirà numero.

65. Def. Se $a_1 = b_1$ e $a_2 = b_2$ si dirà che

$$a_1 + a_2\eta = b_1 + b_2\eta.$$

$0 + a_2\eta$, $a_1 + 0\eta$, $a_1 + 1\eta$ si indicheranno con $a_2\eta$, a_1, $a_1 + \eta$; $a_2\eta$ si dirà infinitesimo.

66. Def. La somma dei numeri $a_1 + a_2\eta$, $b_1 + b_2\eta$, ... è il numero $(a_1 + b_1 + \dots) + (a_2 + b_2 + \dots)\eta$.

67. Def. $a = a_1 + a_2\eta$ si dirà positivo o negativo secondochè a_1 è positivo o negativo o (nel caso di $a_1 = 0$) secondochè a_2 è positivo o negativo.

68. Def. Se $a = b + c$ e c è positivo, si dirà che $a > b$ o $b < a$.

69. Cor. La somma è commutativa e associativa e dipende direttamente dai suoi termini, cioè non cambia se ad un termine si sostituisce un termine eguale e diventa maggiore se ad un termine si sostituisce un termine maggiore.

70. Def. Se $a = b + c$, si dice che c è la differenza fra a e b.

Cor. La differenza di due numeri esiste sempre, è unica e dipende direttamente dal minuendo e inversamente dal sottraendo [1].

71. Prodotto. Pongo per definizione:

$$(a_1 + a_2\eta)(b_1 + b_2\eta) = a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\eta.$$

Come si vede, il secondo membro è lo sviluppo formale del primo, quando si ponga $\eta^2 = 0$.

72. Cor. Se un prodotto è nullo, uno dei fattori è nullo oppure due fattori sono infinitesimi; e viceversa.

Il prodotto ha la proprietà commutativa, associativa, distributiva a destra e a sinistra.

Un prodotto dipende direttamente da un fattore se gli altri non sono nè nulli nè infinitesimi.

73. Quoziente. Se $a = a_1 + a_2\eta$, $b = b_1 + b_2\eta$ e $b_1 \lesseqgtr 0$, esiste un numero e uno solo che moltiplicato per b produce a, esso si dice quoziente di a per b.

74. Def. Se $f(x, y, z, \dots)$ è una funzione finita insieme alle sue derivate prime per $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1, \dots$, porrò per definizione:

$$f(x_1 + x_2\eta, y_1 + y_2\eta, \dots) = f(x_1, y_1, \dots) + \left(x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial y_1} + \dots\right)\eta \text{ [2]}.$$

---

[1] Dalla Nota del prof. Segre, *Le Geometrie proiettive nei campi di numeri duali* (Atti R. Accad. delle scienze di Torino, vol. 47, 1912) tolgo le seguenti notizie bibliografiche:

I numeri complessi di questa specie furono adoperati con altri scopi nella Geometria delle *rette* e delle *dinami* o *viti*. Primo di tutti pare sia stato un lavoro di A. P. Kotjelnikoff (1895) seguito da uno di D. Seiliger (1897). Viene poi subito: J. Petersen (ora Hjelmslev), *Nouveau principe pour études de géométrie des droites*, (Oversigt over K. Danske Videnskabernes Selskab, 1898, p. 283-344). Ma specialmente van citate le ricerche di E. Study e in particolare l'opera del più alto interesse, *Geometrie der Dynamen* (Teubner, 1903), e J. Grünwald, *Ueber duale Zahlen und ihre Anwendung in der Geometrie* (Monatshefte für Mathematik und Physik, 17 Jahrgang, 1906, p. 81-136).

[2] Con $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ si rappresenta $\frac{\partial f}{\partial x}$ dove al posto di $x, y, z \dots$ si metta x_1, y_1, z_1.

Come si vede, il secondo membro è lo sviluppo formale del primo (T a y l o r), quando si ponga $\eta^2 = \eta^3 = \ldots = 0$.

La soprascritta eguaglianza contiene le già date definizioni di somma, prodotto, ecc. e le definizioni di tutte le ordinarie operazioni algebriche e trascendenti.

Es. : $$\operatorname{sen}(x_1 + x_2\eta) = \operatorname{sen}x_1 + \eta x_2 \cos x_1 \ldots \text{ [1]}.$$

Il seno dell'angolo infinitesimo $x_2\eta$ è $x_2\eta$ cioè è eguale all'angolo.

XI. Proiezione ortogonale di un segmento.

75. Def. Due rette si dicono perpendicolari e gli angoli che esse formano si dicono retti, quando due rette parallele alle date (34) condotte per un punto d dello spazio formano quattro angoli eguali.

Cor. Se due rette sono perpendicolari, i loro nuclei e le loro immagini sono perpendicolari.

76. Teor. Se un segmento si proietta normalmente sopra una retta, la misura del segmento proiezione è eguale a quella del segmento che si proietta, moltiplicata pel coseno dell'angolo dei sensi positivi delle due rette a cui i segmenti appartengono.

Dim. Da un punto O (punto d) conduco una retta $\overline{a_1a_2}$ e un segmento $O - \overline{P_1P_2^*}$ di una retta $\overline{b_1b_2}$. Indico con α e β gli angoli acuti a_2a_1 e b_1b_2 e li suppongo positivi; indico con $\vartheta_1 + \vartheta_2\eta$ il numero che misura l'angolo delle rette $\overline{a_1a_2}$ e $\overline{b_1b_2}$, sarà:

$$\vartheta_1 = a_1b_1 \quad \text{e} \quad \vartheta_2 = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta \ (62).$$

Trovo dapprima il numero che misura il segmento dato: Conduco da P_2^* la perpendicolare $P_2^*P_2$ sopra OP_1, indico con δ_1 il valore (positivo) di OP_1 e con δ_2 il valore positivo o negativo di P_1P_2: il segmento dato è misurato da $\delta_1 + \delta_2\eta$ (61).

Trovo la proiezione del punto $P_1P_2^*$ sopra a_1a_2: perpendicolarmente ad a_1 conduco $P_1P'_1$ che sarà il nucleo della retta proiettante; per trovarne l'immagine abbasso da P_2^* la perpendicolare P_2^*A sopra a_1 e da P_1 la perpendicolare

---

[1] Si verificano subito le formole della goniometria

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta, \text{ ecc.}$$

e si può dimostrare la formola di T a y l o r quando siano soddisfatte le note condizioni.

P_1B sopra P_2^*A. L'immagine della retta proiettante passa per B, è perpendicolare ad a_2 e incontrerà a_1 in un punto P'_2. Il segmento $O - P'_1\overline{P'_2}$ è eguale alla proiezione del segmento dato. Vediamo quale relazione passi fra i due segmenti.

Abbiamo: $P'_2A = P_1P'_1 \operatorname{tg}\alpha = \delta_1 \operatorname{sen}\vartheta_1 \operatorname{tg}\alpha$.

P'_1A è la proiezione di $P_1P_2^*$ sopra a_1, quindi è eguale alla somma delle proiezioni di P_1P_2 e $P_2P_2^*$, cioè:

$$P'_1A = P_1P_2 \cos\vartheta_1 - P_2^*P_2 \operatorname{sen}\vartheta_1 = \delta_2 \cos\vartheta_1 - \delta_1 \operatorname{sen}\vartheta_1 \operatorname{tg}\beta.$$

$$P'_1P'_2 = P'_1A - P'_2A = \delta_2 \cos\vartheta_1 - \delta_1 \operatorname{sen}\vartheta_1 \operatorname{tg}\beta - \delta_1 \operatorname{sen}\vartheta_1 \operatorname{tg}\alpha,$$

onde il segmento $O - P'_1\overline{P'_2}$ è misurato dal numero:

$$\delta_1 \cos\vartheta_1 + [\delta_2 \cos\vartheta_1 - \delta_1 \operatorname{sen}\vartheta_1 (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)]\eta = (\delta_1 + \delta_2\eta)\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2\eta),$$

come si vede sviluppando l'ultimo membro.

Gli altri casi che si possono presentare si riducono a quello considerato o si dimostrano nella stessa maniera.

XII. Coordinate cartesiane.

In un piano stabilisco un sistema cartesiano. Ad ogni punto $M = M_1\overline{M_2}$ corrispondono due numeri x, y, che sono l'ascissa e l'ordinata del punto. Se x_1y_1, x_2y_2, sono le coordinate di M_1, M_2 e gli assi sono rette d, le coordinate xy di M sono

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)\eta \quad , \quad y = y_1 + (y_2 - y_1)\eta.$$

Dal teor. 76, con un metodo noto [1], si ricavano le formole mediante le quali si passa da un sistema cartesiano ad un altro. Esse sono lineari e formalmente identiche a quelle della geometria ordinaria.

77. Def. Si dirà che un punto $M = M_1\overline{M_2}$ appartiene alla curva $f(x, y) = 0$, quando le sue coordinate soddisfano all'equazione $f(x, y) = 0$.

Si dirà che un punto (PP') (5) col nucleo improprio appartiene alla curva quando, trasformato il piano con un'omologia $\left(\text{per es. l'omologia armonica: } x' = \frac{1}{x},\ y' = \frac{y}{x}\right)$ tale che (PP') venga a distanza finita, le coordinate della nuova posizione di (PP') soddisfino all'equazione $f(x, y) = 0$ trasformata [2].

---

[1] Veggasi D'Ovidio, *Geometria analitica*, III ediz., p. 63. Dal teor. 76 si ricavano anche i teoremi di Carnot, dei seni ecc. Veggasi D'Ovidio, *op. cit.*, pp. 29 e 30.

[2] Con questa definizione si evita di introdurre nuovi numeri a rappresentare i punti col nucleo improprio.

78. Teor. Ogni retta al finito è rappresentata da un'equazione di primo grado in x e y, e viceversa.

Data una retta al finito la assumo come nuovo asse delle x, cosicchè la sua equazione sarà $y' = 0$. Ritornando agli antichi assi, l'equazione si trasforma, ma rimane di primo grado, perchè le formole di trasformazione sono lineari.

Viceversa, data un'equazione di primo grado, presi due punti coi nuclei distinti le cui coordinate la soddisfino, la retta che passa per questi punti è rappresentata dalla data equazione.

Sia la retta $ax + by + c = 0$, ossia, più distesamente,

$$a_1x_1 + b_1y_1 + c_1 + (a_1x_2 + b_1y_2 + c_1 + a_2x_1 + b_2y_1 + c_2)\eta = 0,$$

e quindi

$$a_1x_1 + b_1y_1 + c_1 = 0, \; a_1x_2 + b_1y_2 + c_1 + a_2x_1 + b_2y_1 + c_2 = 0$$

dalle quali (supposto che gli assi siano rette d) si ricava il teor. 10.

79. Sia $f(x, y, a, b, \ldots) = 0$ una curva, dove $a, b, \ldots$ sono i coefficienti, e sia $\left(x_1 + (x_2 - x_1)\eta \; ; \; y_1 + (y_2 - y_1)\eta\right)$ un suo punto: avremo

$$f(x_1, y_1, a_1, \ldots) + \left((x_2 - x_1)\frac{\partial f}{\partial x_1} + (y_2 - y_1)\frac{\partial f}{\partial y_1} + a_2\frac{\partial f}{\partial a_1} + \ldots\right)\eta = 0,$$

da cui

$$f(x_1, y_1, a_1, \ldots) = 0 \quad (x_2 - x_1)\frac{\partial f}{\partial x_1} + (y_2 - y_1)\frac{\partial f}{\partial y_1} + a_2\frac{\partial f}{\partial a_1} + \ldots = 0,$$

le quali dimostrano che tutti i punti collo stesso nucleo appartenenti alla curva hanno le loro immagini sopra una parallela alla tangente in quel punto alla curva; e viceversa: se un punto $\left(x_1 + (x_2 - x_1)\eta \, ; y_1 + (y_2 - y_1)\eta\right)$ appartiene ad una curva, tutti i punti col nucleo (x_1, y_1) che hanno l'immagine sopra la parallela condotta per (x_2, y_2) alla tangente alla curva, appartengono alla curva (confr. n. 45).

80. Def. $f(x, y) = 0$ si dirà curva d quando ogni punto che appartiene alla curva ha il suo nucleo che appartiene alla curva.

Le curve d sono quelle che si studiano nell'ordinaria geometria, arricchite di nuovi punti i.

81. Teor. Tutti i punti di una curva d che hanno lo stesso nucleo A_1 vale a dire infinitamente vicini ad A_1) giacciono sulla tangente alla curva in

A_1; e viceversa: tutti i punti della tangente in A_1 infinitamente vicini ad A_1 giacciono sulla curva.

Infatti se A_1 appartiene alla curva, la parallela alla tangente in A_1 condotta per l'immagine di A_1 (che è lo stesso A_1) è la tangente.

Resta così modificato il concetto che la tangente in un punto A_1 di una curva passi per due punti infinitamente vicini alla curva: essa passa effettivamente per tutti i punti della curva infinitamente vicini ad A_1; ed ha in comune colla curva un segmento s infinitamente piccolo senza estremi di cui la detta tangente è il prolungamento.

Una curva si può pensare come una spezzata di segmenti s (confr. numero 54).

82. Teor. Se gli assi sono rette d, la curva $f(x, y) = 0$ a coefficienti reali, è una curva d.

Infatti basta osservare che

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)\eta_1 \quad , \quad y = y_1 + (y_2 - y_1)\eta_1 \; ,$$

e sviluppare come nel n. 79.

83. Teor. L'equazione di una curva algebrica d riferita a rette d si può mettere sotto la forma $f(x, y) = 0$, dove i coefficienti sono reali.

Infatti sia $f(x, y, a, b, \ldots) = 0$ una curva algebrica d. Sviluppando (79) si trova

$$a_2 \frac{\partial f}{\partial a_1} + b_2 \frac{\partial f}{\partial b_1} + \ldots = 0 \, ,$$

che si può scrivere

$$f(x_1, y_1, a_2, b_2 \ldots) = 0$$

e che deve essere soddisfatta da tutti i valori di $x_1 y_1$ che soddisfano

$$f(x_1, y_1, a_1, b_1, \ldots) = 0.$$

Onde, se $a_2, b_2 \ldots$ non sono tutti nulli, sarà

$$a_2 = a_1 \quad , \quad b_2 = b_1 \ldots$$

Dividendo l'equazione data per $1 + \eta_1$, i suoi coefficienti diventano reali.

84. Dato sopra una retta un punto $A = A_1\overline{A_2}$, se A_2 descrive una parallela al nucleo della retta, il punto A descrive un segmento s senza estremi

che ha per *centro* A_1. Quando A_2 è all' infinito, il punto A sparisce, perchè $A_1\overline{A_2}$ cessa di essere un'omografia parabolica, ma diventa un'identità.

Chiamando punto *l* un' identità sopra una semiretta *d*, la cui origine sarebbe il nucleo di *l*, il segmento *s* viene ad avere due estremi che sono due punti *l* rappresentabili con $A_2(+\overline{\infty})$, $A_1(-\overline{\infty})$.

V'è ora da considerare il caso che A_1 sia all'infinito cioè che invece del punto $A_1\overline{A_2}$ si abbia un punto (PP') (veggasi n. 5) (¹).

Se PP' diventa infinito, l'omografia diventa degenere e (PP') diventa il punto improprio della retta. Se al contrario PP' si riduce a $+0$ oppure a -0, il punto (PP') sparisce perchè l'omografia diventa un'identità.

Ma, chiamando ancora punto *l* un'identità sopra una retta generata in un verso o nell'opposto, possiamo dire che quando PP' si annulla, il punto (PP') diventa un punto *l*, punto all' infinito che precede, a destra o a sinistra, i punti (PP') che sono, insieme al punto improprio, i punti all' infinito della retta.

85. Problema. Due curve di ordine *m* ed *n* hanno in generale *mn* punti comuni ?

Se x_1y_1 un punto dove le curve dei nuclei

$$f(x_1y_1)=0 \quad , \quad \varphi(x_1y_1)=0$$

si tagliano senza toccarsi ; esso è il nucleo di un punto comune alle due curve date, il quale avrà l'immagine sopra due certe rette parallele alle tangenti ad $f(x_1y_1)=0$, $\varphi(x_1y_1)=0$ nel punto x_1y_1.

Se però le curve dei nuclei hanno in x_1y_1 la stessa tangente, quelle due certe rette o coincidono o sono parallele.

Nel primo caso le curve date hanno in comune tutti i punti di un segmento infinitesimo *s*, nel secondo caso esse hanno in comune due punti *l* estremità di un segmento *s*.

I punti *l* si presentano anche quando si voglia considerare i punti multipli di una curva. Ma questo soggetto richiede un'analisi più minuta da farsi a parte.

86. I concetti esposti si estendono allo spazio a tre dimensioni e si trova fra l'altro :

(¹) A complemento di quanto è detto nel § IV sulla disposizione circolare degli elementi di una forma di prima specie, aggiungo: *Def.* Si dice che il punto (PP') precede (QP') quando P precede Q.

Per giustificare questa definizione basta immaginare due punteggiate prospettive.

I punti (PP') formano un segmento il cui centro è il punto improprio.

Un' equazione di primo grado in x, y, z rappresenta un piano e viceversa;

I punti di una superficie che hanno lo stesso nucleo A_1, hanno le loro immagini sopra un piano parallelo al piano tangente alla superficie nel punto A_1;

I punti di una superficie d, infinitamente vicini ad un punto A_1 della superficie, giacciono sul piano tangente in A_1 alla superficie.

XIII. Omografie.

87. **Def.** Se A, B, C, D $\left(A = A_1\overline{A_2}\ldots\right)$ sono punti coi nuclei distinti appartenenti ad una retta sulla quale sia stato fissato il verso positivo, l'espressione:

$$\rho = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$$

dove AC, .. sono i numeri che misurano i segmenti omonimi, si dice rapporto *anarmonico* dei quattro punti.

88. Se indico con ρ_1 il birapporto dei moduli e con ρ_2 la bidifferenza delle immagini dei quattro punti dati (38), si trova, svolgendo, che

$$\rho = \rho_1(1 - \rho_2\eta).$$

Onde (41, 42):

89. Date due punteggiate proiettive, il rapporto anarmonico di quattro punti dell'una è eguale a quello dei corrispondenti e viceversa [1].

E ancora (44):

90. Se ABCD è un gruppo armonico, il rapporto anarmonico è -1, e se O è il punto di mezzo di AB, si ha: $OC \cdot OD = OA^2$.

Col solito procedimento si ricava che se x e x' sono le coordinate di due punti corrispondenti in due punteggiate proiettive, x e x' sono legati da una relazione bilineare e viceversa, dopo di che anche le omografie si trattano analiticamente come nella ordinaria geometria.

---

[1] Al punto $x_1 + x_2\eta$ di una punteggiata faccio corrispondere il punto $x_1 - x_2\eta$ d'un'altra punteggiata, cosicchè se $\rho_1(1 + \rho_2\eta)$ è il rapporto anarmonico di quattro punti di una punteggiata, sarà $\rho_1(1 - \rho_2\eta)$ il rapporto anarmonico dei corrispondenti (38). Le due punteggiate non sono proiettive, eppure ad un gruppo armonico dell'una corrisponde un gruppo armonico dell'altra (veggasi 37). Qui si ripete un fatto che il Segre osservava avvenire nel *coniugio*.

XIV. Numeri transfiniti.

91. Sopra una retta giace un punto improprio, intersezione della retta col piano all'infinito, e una semplice infinità di punti (PP′) (veggasi n.° 5) che diremo punti *transfiniti* e che si ottengono segando la retta con piani il cui nucleo è parallelo al nucleo della retta.

Rappresenterò un segmento (semiretta) limitato da un punto $A = A_1\overline{A_2}$ e dal punto improprio col segno ∞ (numero infinito).

Per i segmenti *transfiniti*, limitati da un punto $A = A_1\overline{A_2}$ e da un punto (PP′), introdurrò dei nuovi segni che chiamerò numeri *transfiniti*.

92. Scelti sopra una retta un punto origine $O = O_1\overline{O_2}$ e il verso positivo, l'ascissa del coniugato armonico di (PP′) rispetto ai due punti U, U′ di ascissa 1 e -1 è $\frac{\eta_1}{P'P}$ (44, 39). Ma se x e x' sono due punti al finito coniugati rispetto ad U e U′ si ha (88): $xx' = 1$, onde è naturale di assumere come misura del segmento O — (PP′) il segno $\frac{P'P}{\eta_1}$.

Comunque si trasporti la terna UOU′, la distanza di O dal coniugato armonico di (PP′) non cambia, quindi darò la seguente

Def. Se M ed N sono punti al finito, i due segmenti

$$M - (PP') \quad , \quad N - (PP')$$

sono eguali.

93. Def. L'espressione $|d_1 + d_2\eta_1|$, dove d_1 e d_2 sono funzioni di una variabile t che col tendere p. es. di t a zero tendono ad un limite, si dirà ***numero***.

94. Def. 1° Se $\lim d_1$ e $\lim d_2$ sono finiti, porrò

$$|d_1 + d_2\eta_1| = \lim d_1 + \eta_1 \lim d_2.$$

I numeri ora introdotti comprendono dunque come casi particolari quelli del n.° 64.

2° Se $\lim d_1$ è finito e $\lim d_2 = \pm\infty$, il punto di ascissa $d_1 + d_2\eta_1$ tende a diventare uno dei due estremi del segmento s che ha per centro il punto di ascissa eguale a $\lim d_1$, e precisamente l'estremo di destra o di sinistra secondochè $\lim d_2$ è $+$ o $-\infty$.

Diremo che $|d_1 + d_2\eta_1|$ è l'ascissa di questo punto.

3° Se $\lim d_1 = \pm\infty$ e $\lim d_2$ è finito, il punto di ascissa $d_1 + d_2\eta_1$ tende a diventare il punto improprio della retta.

Diremo che, in questo caso, $|d_1 + d_2\eta|$ è l'ascissa del punto improprio della retta.

Se $\lim d_1$ e $\lim d_2$ sono infiniti, bisogna distinguere diversi casi.

L'omografia parabolica definita dal punto di ascissa $d_1 + d_2\eta$ è

$$xy + (d_2 - 2d_1)x - d_2 y + d_1^2 = 0$$

dove x e y sono le ascisse di due punti corrispondenti.

Dividendo per d_2 si ottiene:

$$(xy : d_2) + [1 - 2(d_1 : d_2)]x - y + d_1^2 : d_2 = 0.$$

Indico con OO′ il $\lim(d_1^2 : d_2)$ e suppongo che d_2 tenda all'infinito; l'omografia diventa

$$x = y - \mathrm{OO'}.$$

4° Se OO′ è finito e diverso da zero, l'omografia rappresenta il punto transfinito (OO′).

Diremo che, in questo caso, $|d_1 + d_2\eta|$ è un numero transfinito, ascissa di (OO′).

5° Se OO′ è infinito, l'omografia è degenere e rappresenta il punto improprio della retta.

Diremo che $|d_1 + d_2\eta|$ è l'ascissa del punto improprio.

6° Se $\mathrm{OO'} = 0$, l'omografia è un'identità e rappresenta un punto l a distanza infinita, il primo, per dir così, dei punti transfiniti a destra o a sinistra di O secondochè $\lim(d_1^2 : d_2)$ è $+$ o $-$ 0.

Diremo che $|d_1 + d_2\eta|$ è l'ascissa di questo punto.

7° Se $d_1^2 : d_2$ o d_1 o d_2 non tendono ad alcun limite, diremo che il numero è indeterminato.

95. Def. Due numeri si dicono eguali quando sono ascisse dello stesso punto e se un punto precede un altro si dirà che l'ascissa del primo è minore dell'ascissa del secondo.

96. Gli enti di questa *Geometria non-Archimedea* non sono ipotetici, ma sono *reali* con una rappresentazione *reale* e comoda quale è l'omografia parabolica.

Molti problemi sono stati solamente posti. Non è stato fatto cenno, p. es., delle coordinate Plückeriane, ma sono stati preparati gli elementi per svolgere con facilità non solo la loro teoria, ma tutta una *Matematica non-Archimedea*. Soltanto dopo un tale svolgimento si potrà giudicare della forza trasformativa delle idee che abbiamo presentate.